7/5/2018

Άσκηση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1,4,5)(2,6,3,7)$$

$$\operatorname{ord}(\sigma) = \text{ΕΚΠ}(3,4) = \boxed{12}$$

Ορισμός Αντιμετάθεση είναι ένας κύκλος μήκους 2.

Πόρισμα Κάθε μετάθεση γράφεται ως γινόμενο αντιμεταθέσεων.

Παράδειγμα

$$\sigma = (1,4,5)(2,6,3,7) = (1,5)(1,4)(2,7)(2,3)(2,6)$$

$$\| $$

$$(4,5,1)(6,3,7,2) = (4,1)(4,5)(6,2)(6,7)(6,3)$$

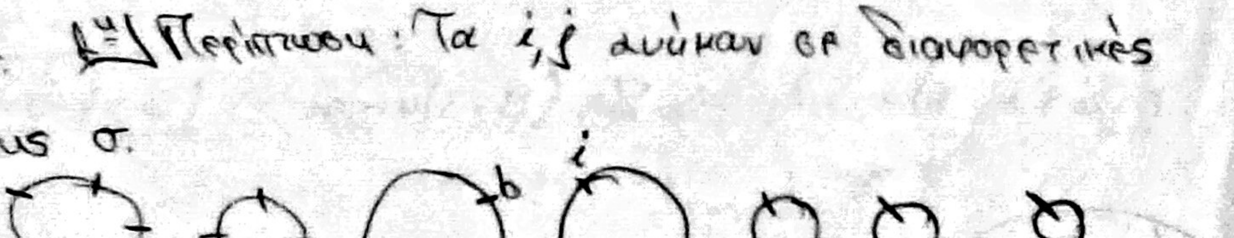
$$\|$$

$$(4,1)(4,5)\underbrace{(3,2)(3,2)}_{Id}(6,7)(6,3)$$

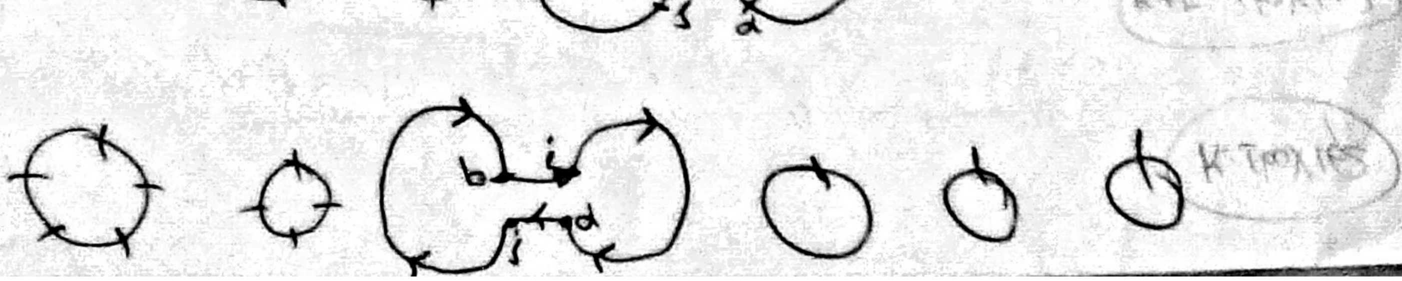
Πρόταση Έστω $\sigma \in S_n$ μία μετάθεση και $\tau = (i,j)$ μία αντιμετάθεση. Το πλήθος των τροχιών της σ, και το πλήθος των τροχιών της $\tau\sigma$, διαφέρουν κατά ένα.

Απόδειξη. $1^{η}$ Περίπτωση: Τα i,j ανήκουν σε διαφορετικές τροχιές της σ.

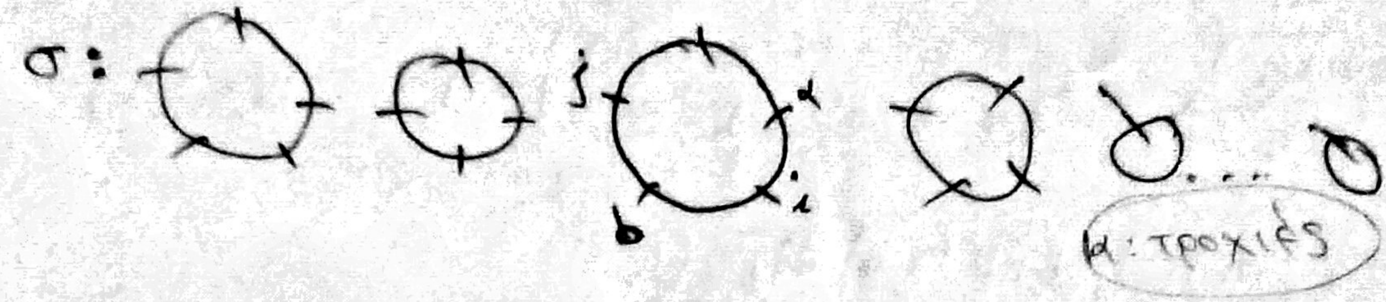
σ :

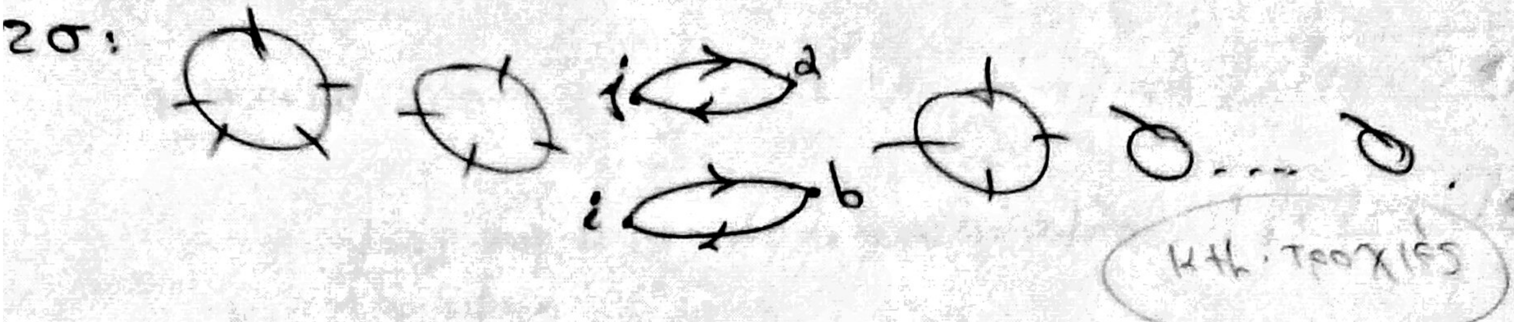


$\tau\sigma$:



2η Περίπτωση: Τα i, j ανήκουν στην ίδια τροχιά της σ.





▸ **Θεώρημα** Κάθε μετάθεση του S_n γράφεται ως γινόμενο άρτιου πλήθους αντιμεταθέσεων είτε περιττού πλήθους αντιμεταθέσεων (δηλαδή καμία μετάθεση δεν γράφεται ως γινόμενο και άρτιου και περιττού πλήθους αντιμεταθέσεων).

▸ Έστω $\sigma \in S_n$ και $\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_s$, όπου τ_i αντιμετάθεση.
Έστω r το πλήθος των τροχιών της σ. Θα δείξουμε:

$$\boxed{s \equiv (n-r) \bmod 2} \quad (*)$$

▸ **Παράδειγμα** $\sigma \in S_8$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix} = (1,3,4)(2,6,7,5)(8)$

• $s \equiv (n-r) \bmod 2 \Rightarrow s \equiv (8-3) \bmod 2 \Rightarrow \boxed{s \equiv 1 \bmod 2}$

⊛ **Απόδειξη**: • Για $s=0$: $\sigma = I \Rightarrow \boxed{n \text{ τροχιές, δηλαδή } r=n}$

• Άρα: $s \equiv (n-r) \bmod 2 \Rightarrow 0 \equiv (n-n) \bmod 2 \Rightarrow 0 \equiv 0 \bmod 2$

Ισχύει

• Για $s=1$: $\sigma = z_1 \Rightarrow \boxed{r = n-1 \text{ τροχιές}}$

$$\Downarrow$$

$$1 \equiv n-(n-1) \bmod 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \equiv 1 \bmod 2 \quad \text{Ισχύει}$$

• Υποθέτω ότι ισχύει ο τύπος $s \equiv (n-r) \bmod 2$, για $s=k$.

Δηλαδή, αν $\sigma = z_1 z_2 \ldots z_k$, τότε: $\boxed{k \equiv (n-r) \bmod 2}$

• Θα δείξουμε ότι ισχύει για $s=k+1$.

• Έστω: $\mu = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{k+1}$, όπου $\mu \in S_n$ και μ_i: αντιμεταθέσεις

$$\Downarrow$$

$$\mu = \mu_1(\mu_2 \mu_3 \ldots \mu_{k+1}) = \mu_1 \cdot \mu'$$

• Η μ' είναι γινόμενο k-αντιμεταθέσεων $\Longrightarrow$

r του μ'

$\Longrightarrow \boxed{k \equiv (n-r) \bmod 2}$

• Έχω: $\mu = \mu_1 \cdot \mu' \Longrightarrow$ Το πλήθος των τροχιών της μ και της μ' διαφέρουν κατά 1.

αντιμετάθεση

$$\Downarrow$$

$$\boxed{r(\mu) = r(\mu') + 1} \quad \text{ή} \quad \boxed{r(\mu) = r(\mu') - 1}$$

• **Όμως**, $\kappa \equiv n - r(h') \bmod 2 \Rightarrow \kappa + 1 \equiv (n - r(h') + 1) \bmod 2$

$$\Rightarrow \kappa + 1 \equiv [n - (r(h') - 1)] \bmod 2 \equiv n - (r(h') + 1) \bmod 2$$

• **Σε κάθε** περίπτωση:

$$\kappa + 1 \equiv (n - r(h)) \bmod 2$$

• Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι:

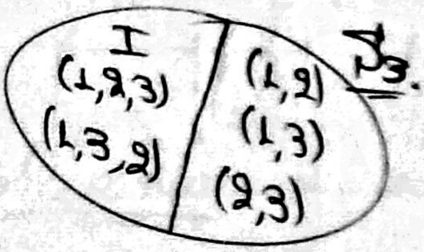
$$\boxed{\mathcal{S} \equiv (n - r) \bmod 2}$$

▶ **Ορισμός** Μία μετάθεση λέγεται *άρτια*, αν γράφεται ως γινόμενο άρτιου πλήθους αντιμεταθέσεων. Μία μετάθεση λέγεται *περιττή*, αν γράφεται ως γινόμενο περιττού πλήθους αντιμεταθέσεων.

• Με A_n συμβολίζουμε το πλήθος των *άρτιων* μεταθέσεων.

• Με B_n συμβολίζουμε -״- *περιττών* -״-.

▶ **Παράδειγμα**:



• $I = (1,2)(1,2)$

$(1,2)$ $\quad$ $(1,2,3)$

$(1,3)$

$(2,3)$ $\quad$ $(1,3,2)$

▶ **Πρόταση** Το πλήθος των *άρτιων* μεταθέσεων του S_n, είναι το ίδιο με το πλήθος των *περιττών* μεταθέσεων.

$$\boxed{\# A_n = |A_n| = \frac{n!}{2}}$$

▸ <u>Απόδειξη</u>: Θεωρώ $f_\tau : A_n \longrightarrow B_n$, με $\boxed{f(\sigma) = \tau\sigma}$, όπου τ: στοιχείο του B_n.

• <u>Έστω</u> $f_\tau(\sigma_1) = f_\tau(\sigma_2) \Longrightarrow \tau\circ\sigma_1 = \tau\circ\sigma_2 \xrightarrow[\text{διαγραφής}]{\text{κανόνας}} \boxed{\sigma_1 = \sigma_2}$

$\Longrightarrow \boxed{f_\tau : 1\text{-}1}$

• <u>Έστω</u> $\tau_1\tau_2 \dots \tau_{2k+1} \in B_n$. Τότε:

$$f_\tau(\tau\cdot\tau_1\tau_2\dots\tau_{2k+1}) = \underbrace{\tau\cdot\tau}_{I}\cdot\tau_1\tau_2\dots\tau_{2k+1} = \underline{\tau_1\tau_2\dots\tau_{2k+1} \in B_n}$$

$\Downarrow$

$\tau_1\tau_2\dots\tau_{2k+1} \in B_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau\cdot\tau_1\dots\tau_{2k+1} \in A_n$

• <u>Άρα</u>: $\boxed{f_\tau : \text{επί}}$

• <u>Συνεπώς</u>, τα A_n & B_n είναι <u>ισοπληθικά</u>.

• <u>Άρα</u>. $\boxed{\#A_n = |A_n| = \frac{n!}{2}}$

<u>Και</u> $\boxed{\#A_n = |A_n| = |B_n| = \#B_n}$

▸ $\boxed{\text{Παράδειγμα}}$ $B_4 = \{ I, (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4),$
$(1,2,3), (1,3,2), (1,2,4), (1,4,2), (1,3,4), (1,4,3), (2,3,4), (2,4,3),$
$(1,2,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4), (1,3,4,2), (1,4,2,3), (1,4,3,2),$
$(1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) \}$

• $A_4 = \{ I, (1,2,3), (1,3,2), (1,3,4), (1,4,3), (1,2,4), (1,4,2), (2,3,4), (2,4,3), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) \}$

▸ Θεώρημα Το σύνολο A_n αποτελεί υποομάδα της S_n

▸ Σχόλιο Η υποομάδα A_n ονομάζεται εναλλάσσουσα υποομάδα της S_n.

▸ Απόδειξη (i) Για $I \in S_n \Rightarrow \boxed{I \in A_n} \Rightarrow \boxed{A_n \neq \emptyset}$

(ii) Έστω $\sigma_1, \sigma_2 \in A_n \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_{2\kappa}, & \tau_i: \text{αντιμεταθέσεις} \\ \sigma_2 = \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{2\lambda} \end{cases}$

$$\Rightarrow \sigma_1 \sigma_2 = \underbrace{(\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_{2\kappa})(\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{2\lambda})}_{2\kappa + 2\lambda = \text{άρτιος}} \in A_n$$

(iii) Έστω $\sigma \in A_n \Rightarrow \sigma = \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_{2\kappa}$

• Τότε $\sigma^{-1} = \tau_{2\kappa} \ldots \tau_2 \tau_1$, καθώς:

$$\sigma \sigma^{-1} = \tau_1 \tau_2 \ldots \underbrace{(\tau_{2\kappa} \circ \tau_{2\kappa})}_{I} \ldots \tau_2 \tau_1 = \ldots = I$$

• Άρα, επίσης: $\sigma^{-1} = \tau_{2\kappa} \ldots \tau_2 \tau_1 \Rightarrow \boxed{\sigma^{-1} \in A_n}$

• Άρα, $\boxed{A_n \leq S_n}$

▶**Πρόταση** Η A_n είναι κανονική υποομάδα της S_n

• Πράγματι: $A_n \le S_n \Rightarrow [S_n : A_n] = \frac{|S_n|}{|A_n|} = \frac{n!}{n!/2} = \boxed{2}$

$\Rightarrow$ Άρα: $\boxed{A_n \trianglelefteq S_n}$.

▶**Ορισμός** Έστω $\sigma \in S_n$. Ορίζουμε

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \text{αν } \sigma: \text{άρτια} \\ -1, & \text{αν } \sigma: \text{περιττή} \end{cases}$$

πρόσημο

▶**Παράδειγμα** Θεωρώ την απεικόνιση $S_n \xrightarrow{\text{sign}} \{-1,1\} = \langle -1 \rangle$

δηλαδή $S_n \ni \sigma \longrightarrow \text{sign}(\sigma)$

(i) Αν $\sigma_1,\sigma_2 \in A_n \Rightarrow \text{sign}(\sigma_1) = +1 = \text{sign}(\sigma_2)$

και $\text{sign}(\sigma_1\sigma_2) \overset{\sigma_1\sigma_2:\ \text{άρτια}}{=} +1$

Άρα $\text{sign}(\sigma_1\sigma_2) = \text{sign}(\sigma_1)\cdot\text{sign}(\sigma_2)$

(ii) Αν $\sigma_1,\sigma_2 \in B_n \Rightarrow \text{sign}(\sigma_1) = -1 = \text{sign}(\sigma_2)$

και: $\text{sign}(\sigma_1\sigma_2) \underset{\text{ως γινόμενο περιττών}}{\overset{\sigma_1\sigma_2:\ \text{άρτια}}{=}} \text{sign}(\sigma_1)\cdot\text{sign}(\sigma_2) = +1$

(iii) Αν $\sigma_1 \in A_n$ & $\sigma_2 \in B_n$ ή αντίστροφα, τότε:

$\text{sign}(\sigma_1\sigma_2) = -1 = \underset{\pm 1}{\text{sign}(\sigma_1)} \cdot \underset{\mp 1}{\text{sign}(\sigma_2)}$ Άρα sign: ομομορφισμός

• $Ker(sign) = \{\sigma \in S_n \mid sign(\sigma) = +1\} \Rightarrow \boxed{Ker(sign) = A_n}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A_n \trianglelefteq S_n}$$

Άσκηση Ν.δ.ο για $x \in S_6$, ισχύει: $x \circ \sigma \circ x^{-1} = (1,2,3,4,5,6)$

• όπου $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,4,5,6,2)$

Λύση: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ x(1) & x(2) & x(3) & x(4) & x(5) & x(6) \end{pmatrix} (1,3,4,5,6,2) \begin{pmatrix} x(1) & x(2) & x(3) & x(4) & x(5) & x(6) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$

$= \big(x(1), x(3), x(4), x(5), x(6), x(2)\big) = (1,2,3,4,5,6)$

(i) $x(1)=1,\ x(3)=2,\ x(4)=3,\ x(5)=4,\ x(6)=5,\ x(2)=6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (2,6,5,4,3)$

(ii) $x(1)=2,\ x(3)=3,\ x(4)=4,\ x(5)=5,\ x(6)=6,\ x(2)=1$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1,2)$

(iii), ... , (vi) → Για το σπίτι